GGJUPX

ચતુષ્કોણની સમજ

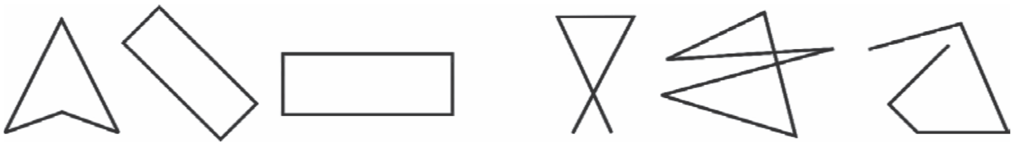
પ્રકરણ **3**

3.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે જાણો છો કે કાગળ એક **સમતલની પ્રતિકૃતિ** છે. જ્યારે તમે કાગળ પર પેન્સિલ ઉપાડ્યા વગર તેના પર રહેલાં બિંદુઓને એકબીજાં સાથે જોડો છો (માત્ર એક બિંદુ ના હોય તેવા આકૃતિના કોઇ પણ ભાગને રેખાંકિત કર્યા વગર) ત્યારે તમને **સમતલીય વક્ર** મળે છે.

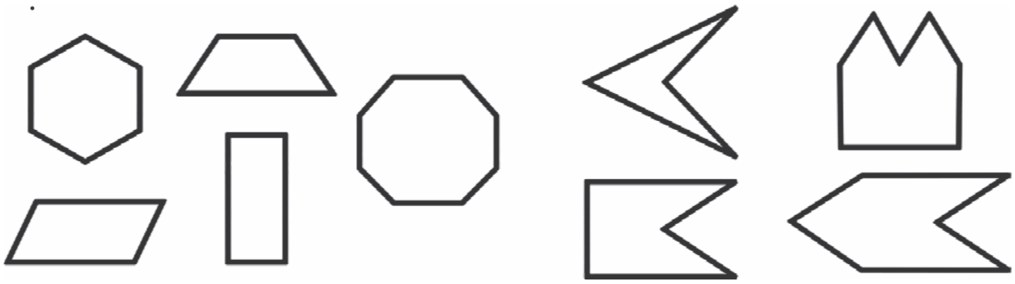
3.1.1 બહિર્મુખ અને અંતર્મુખ બહુકોણ

ફક્ત રેખાખંડથી બનતા સાદા બંધ વક્રને બહુકોણ કહે છે.



વક્ર જે બહુકોણ છે **વક્ર જે બહુકોણ નથી**

અહીં થોડા બહિર્મુખ (Convex) બહુકોણ અને થોડા અંતર્મુખ (Concave) બહુકોણ આપેલ છે. (આકૃતિ 3.1)



બહિર્મુખ બહુકોણ **અંતર્મુખ બહુકોણ**

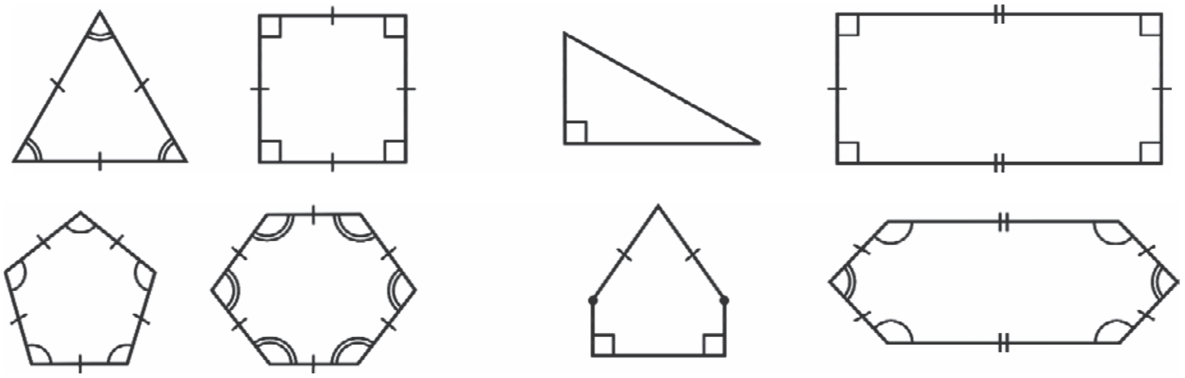
આકૃતિ 3.1

તમે કહી શકો, કે આ પ્રકારના બહુકોણ એકબીજાથી કેવી રીતે અલગ છે ? જે બહુકોણ બહિર્મુખ હોય છે તેમના વિકર્ણનો કોઈપણ ભાગ બહુકોણના બહિર્ભાગમાં હોતો નથી. અથવા બહુકોણના અંતર્ભાગમાં રહેલ બે ભિન્ન બિંદુઓને જોડતો કોઈ એક રેખાખંડ સંપૂર્ણપણે તેના અંતર્ભાગમાં જ હોય છે. શું આ વાક્ય અંતર્મુખ બહુકોણ માટે પણ સત્ય છે ? આપેલ આકૃતિઓનો અભ્યાસ કરો. તદુપરાંત પોતાના શબ્દોમાં બહિર્મુખ અને અંતર્મુખ બહુકોણનું વર્ણન કરવાનો પ્રયત્ન કરો અને દરેક પ્રકારના બહુકોણની બે કાચી આકૃતિ દોરો.

આ ધોરણમાં આપણે ફક્ત બહિર્મુખ બહુકોણની જ ચર્ચા કરીશું.

3.1.2 નિયમિત અને અનિયમિત બહુકોણ

એક નિયમિત બહુકોણ સમબાજુ તથા સમકોણીય હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, ચોરસમાં બાજુના તથા ખૂણાનાં માપ સમાન હોય છે. આથી તે નિયમિત બહુકોણ છે. લંબચોરસ સમકોણીય છે પરંતુ સમબાજુ નથી. તો શું તે નિયમિત બહુકોણ છે ? શું સમબાજુ ત્રિકોણ નિયમિત બહુકોણ છે ? કેમ ?



નિયમિત બહુકોણ **બહુકોણ કે જે નિયમિત નથી**

[**નોંધ :** ×× અથવા ×ની નિશાની સમાન લંબાઈવાળા રેખાખંડ દર્શાવે છે.]

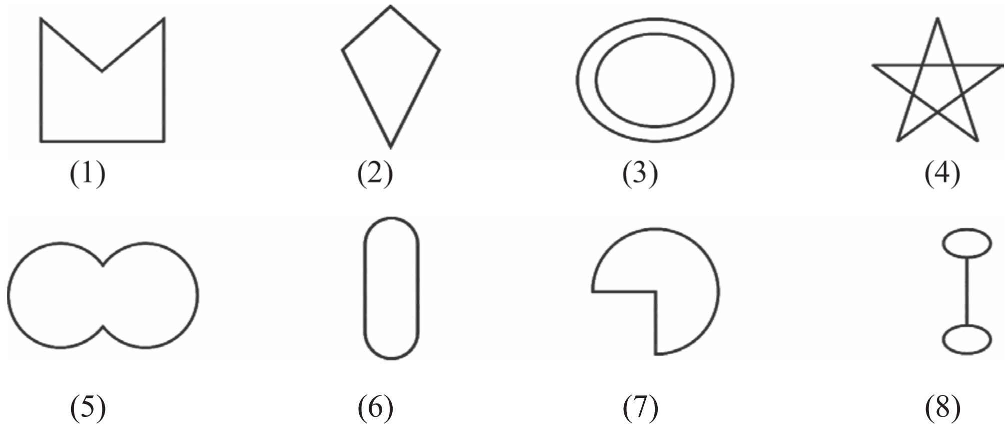
અગાઉના ધોરણમાં તમે એવા કોઈ ચતુષ્કોણનો અભ્યાસ કર્યો છે કે જે સમબાજુ હોય પણ સમકોણ ના હોય ?

અગાઉના ધોરણમાં આવેલ ચતુષ્કોણની આકૃતિઓ યાદ કરો જેવી કે, લંબચોરસ, ચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ વગેરે.

કોઈ એવો ત્રિકોણ છે કે જે સમબાજુ હોય પણ સમકોણ ના હોય ?

સ્વાધ્યાય 3.1

1. અહીં કેટલીક આકૃતિઓ આપેલ છે.



પ્રત્યેકનું નીચે દર્શાવેલ આધાર પ્રમાણે વર્ગીકરણ કરો.

(a) સરળ વક્ર (b) સરળ બંધ વક્ર (c) બહુકોણ

(d) બહિર્મુખ બહુકોણ (e) અંતર્મુખ બહુકોણ

2. નિયમિત બહુકોણ એટલે શું ? એવા નિયમિત બહુકોણનાં નામ આપો જેમાં :

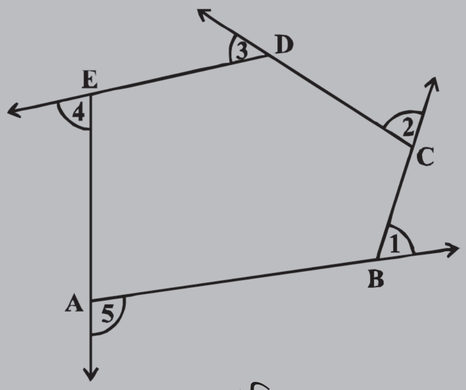
(i) 3 બાજુ હોય (ii) 4 બાજુ હોય (iii) 6 બાજુ હોય

3.2 એક બહુકોણનાં બહિષ્કોણનાં માપનો સરવાળો

કેટલાક પ્રસંગોમાં બહિષ્કોણ અંગેનું જ્ઞાન અંતઃકોણ તેમજ બાજુઓના પ્રકાર જાણવામાં મદદરૂપ થાય છે.

આટલું કરો

ચૉકના ટુકડાથી જમીન પર એક બહુકોણ બનાવો. (આકૃતિમાં, એક પંચકોણ ABCDE દર્શાવેલ છે.) (આકૃતિ 3.2). આપણે બધા જ ખૂણાના માપનો સરવાળો જાણવા માંગીએ છીએ, અર્થાત્ $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5$. શિરોબિંદુ A થી શરૂઆત કરીને $\overline{AB}$ તરફ ચાલવાનું શરૂ કરો. B પર પહોંચ્યા બાદ, તમારે $m\angle 1$ પર વળવું પડશે જેનાથી તમે $\overline{BC}$ તરફ ચાલી શકશો. C પર પહોંચ્યા બાદ, $\overline{CD}$ તરફ ચાલવા માટે તમારે $m\angle 2$ પરથી વળવું પડશે. આ રીતે, બાજુ AB પર પરત ન ફરો ત્યાં સુધી ચાલવાનું ચાલુ રાખો. આ રીતે તમે એક ચક્કર પૂરું કરશો. આમ, $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 = 360^\circ$. ઉપરોક્ત પરિણામ, ગમે તેટલી બાજુઓ ધરાવતા બહુકોણ માટે સત્ય છે. આથી, એક બહુકોણમાં બહિષ્કોણનાં માપનો સરવાળો 360° છે.



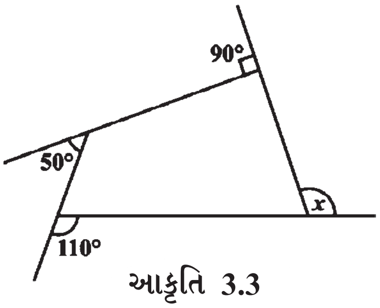
આકૃતિ 3.2

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 3.3માં x નું માપ શોધો :

ઉકેલ : $x + 90^\circ + 50^\circ + 110^\circ = 360^\circ$ (કેમ ?)

$x + 250^\circ = 360^\circ$

$x = 110^\circ$

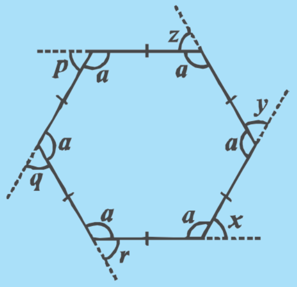


આકૃતિ 3.3

પ્રયત્ન કરો

એક નિયમિત ષટ્કોણ લો (આકૃતિ 3.4).

1. તેના બહિષ્કોણ x, y, z, p, q તથા rનાં માપનો સરવાળો કેટલો છે ?
2. $x = y = z = p = q = r$ છે ? કેમ ?
3. નીચેના પ્રત્યેકનું માપ કેટલું હશે ?
   (i) બહિષ્કોણ (ii) અંતઃકોણ
4. આ પ્રવૃત્તિ નીચે આપેલ સ્થિતિ માટે ફરીથી કરો.
   (i) નિયમિત અષ્ટકોણ (ii) નિયમિત 20-કોણ



આકૃતિ 3.4

ઉદાહરણ 2 : એક નિયમિત બહુકોણના પ્રત્યેક બહિષ્કોણનું માપ 45° હોય તો તેની બાજુઓની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : બધા જ, બહિષ્કોણનાં માપનો સરવાળો $= 360^\circ$

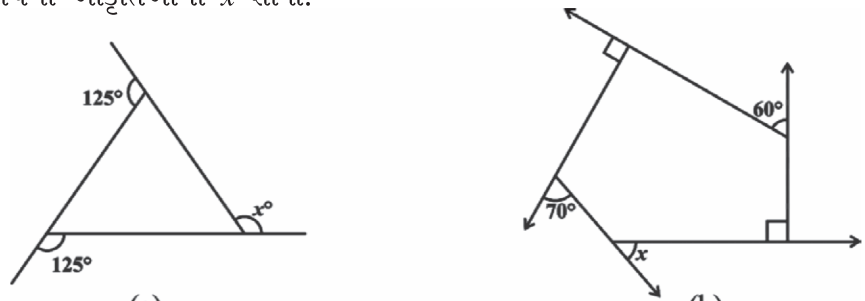
પ્રત્યેક બહિષ્કોણનું માપ $= 45^\circ$

એટલે, બહિષ્કોણની સંખ્યા $= \frac{360}{45} = 8$

આપેલ બહુકોણને 8 બાજુ હશે.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. નીચેની આકૃતિઓમાં x શોધો.



(a) (b)

2. નીચે પ્રમાણેની બાજુઓ ધરાવતા નિયમિત બહુકોણમાં બહિષ્કોણનું માપ શોધો.
(a) 9 બાજુ (b) 15 બાજુ

3. એક નિયમિત બહુકોણને કેટલી બાજુઓ હોય તો તેના દરેક બહિષ્કોણનું માપ 24° થાય ?

4. એક નિયમિત બહુકોણને કેટલી બાજુઓ હોય તો તેના દરેક અંતઃકોણનું માપ 165° થાય ?

5. (a) એવો નિયમિત બહુકોણ શક્ય છે કે જેમાં દરેક બહિષ્કોણનું માપ 22° હોય ?
(b) શું આ માપ નિયમિત બહુકોણના અંતઃકોણનું હોઈ શકે ? કેમ ?

6. (a) નિયમિત બહુકોણમાં અંતઃકોણનું ઓછામાં ઓછું માપ કેટલું હોઈ શકે ? કેમ ?
(b) નિયમિત બહુકોણમાં બહિષ્કોણનું વધુમાં વધુ માપ કેટલું હોઈ શકે ?

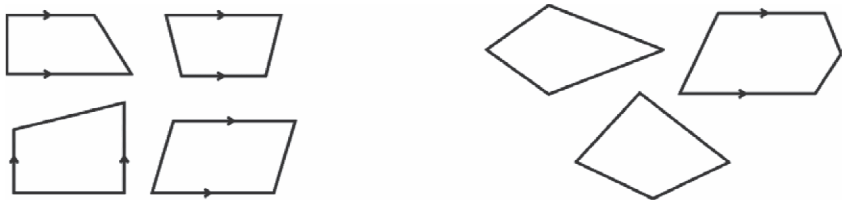
4YFBUS

3.3 ચતુષ્કોણના પ્રકાર

ચતુષ્કોણની બાજુઓ તથા ખૂણાના પ્રકારના આધારે, તેને નામ આપવામાં આવે છે.

3.3.1 સમલંબ ચતુષ્કોણ (Trapezium)

સમલંબ ચતુષ્કોણ એક એવો ચતુષ્કોણ છે, જેમાં સામસામેની બાજુની ફક્ત એક જ જોડની બાજુઓ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.

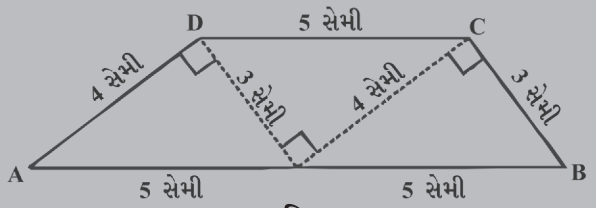


સમલંબ ચતુષ્કોણ છે **સમલંબ ચતુષ્કોણ નથી**

ઉપરની આકૃતિઓનો અભ્યાસ કરો અને મિત્રો સાથે ચર્ચા કરો કે, કેમ આમાંથી કેટલાક સમલંબ ચતુષ્કોણ છે જ્યારે બીજા નથી. (**નોંધ :** તીરની નિશાની સમાંતર રેખાઓ દર્શાવે છે.)

આટલું કરો

1. બાજુઓનાં માપ 3 સેમી, 4 સેમી અને 5 સેમી હોય તેવા એકરૂપ ત્રિકોણના, એકસરખા ટુકડાઓ લો. તેમને આકૃતિ 3.5માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ગોઠવો.



આકૃતિ 3.5

અહીં તમને એક સમલંબ ચતુષ્કોણ મળશે. (નિરીક્ષણ કરો!) કઈ બાજુઓ પરસ્પર સમાંતર છે ? અસમાંતર બાજુઓનું માપ સમાન છે ?

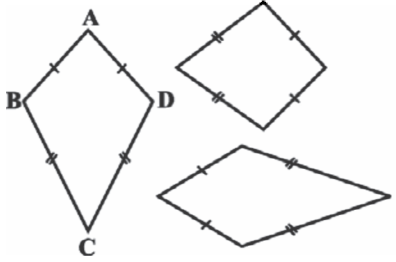
અહીં ઉપયોગમાં લીધેલ એકરૂપ ત્રિકોણના ઉપયોગથી તમને બીજા બે સમલંબ ચતુષ્કોણ મળી શકે છે. તેમને શોધી તેમના આકારની ચર્ચા કરો.

2. તમારા તથા તમારા મિત્રોના ‘‘કંપાસબૉક્સ’’(જિઑમેટ્રી બૉક્સ)માંથી ચાર કાટખૂણિયા લો. તેમને અલગ-અલગ સંખ્યામાં ઉપયોગ કરી સાથે-સાથે રાખીને અલગ-અલગ પ્રકારના સમલંબ ચતુષ્કોણ મેળવો.

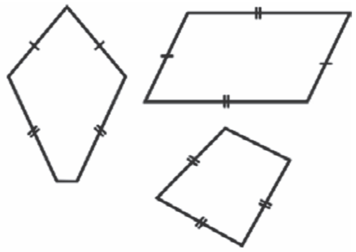
સમલંબ ચતુષ્કોણમાં પરસ્પર સમાંતર ન હોય તેવી બાજુઓ જો સમાન લંબાઈની હોય તો તે ચતુષ્કોણને સમદ્વિબાજુ સમલંબ ચતુષ્કોણ કહે છે. ઉપરોક્ત નિરીક્ષણમાં તમને એક પણ સમદ્વિબાજુ સમલંબ ચતુષ્કોણ મળ્યો ?

3.3.2 પતંગ (પતંગાકાર ચતુષ્કોણ) (Kite)

પતંગ એક વિશિષ્ટ પ્રકારનો ચતુષ્કોણ છે. દરેક આકૃતિમાં એકસરખી નિશાનીવાળી બાજુઓની લંબાઈ સમાન છે. દા.ત., AB = AD અને BC = CD.



આ પતંગાકાર ચતુષ્કોણ છે.



આ પતંગાકાર ચતુષ્કોણ નથી.

આપેલ આકૃતિઓનો અભ્યાસ કરી અને પતંગાકાર ચતુષ્કોણ વિશે વર્ણન કરો. જુઓ કે,

(i) પતંગને 4 બાજુઓ હોય છે (તે ચતુષ્કોણ છે).

(ii) તેમાં સમાન લંબાઈવાળી પાસ-પાસેની બાજુની બે અલગ-અલગ જોડ હોય છે.

ચોરસને પતંગ કહી શકાય કે નહીં તે ચકાસો.

આટલું કરો

એક જાડો કાગળ લો. તેને વચ્ચેથી વાળો.

આકૃતિ 3.6 માં બતાવ્યા પ્રમાણે અલગ-અલગ લંબાઈના બે રેખાખંડ દોરો.

આ રેખાખંડને કાપી અને કાગળને ખોલો.

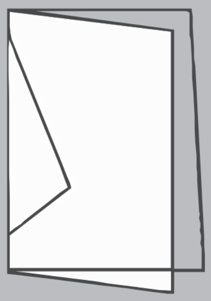
તમને એક પતંગનો આકાર મળશે. (આકૃતિ 3.7)

પતંગમાં કોઈ સંમિત રેખા છે ?

પતંગના બંને વિકર્ણ પર ગડી વાળો. હવે આ વિકર્ણ કાટખૂણે છેદે છે કે નહીં તે કાટખૂણિયાની મદદથી ચકાસો. શું આ વિકર્ણની લંબાઈ સમાન છે ? વિકર્ણ પરસ્પર દુભાગે છે કે નહીં તે ચકાસો. (કાગળની ગડી વાળીને અથવા માપીને) પતંગના એક ખૂણાને, વિકર્ણની વિપરીત દિશામાં વાળીને સમાન માપના ખૂણા ચકાસો.

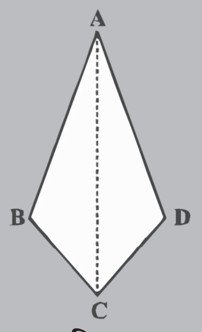
વિકર્ણ પર પડેલ ગડીનું નિરીક્ષણ કરો, શું તે એમ દર્શાવે છે કે વિકર્ણ એક ખૂણાનો દ્વિભાજક છે ?

તમારાં અવલોકનો તમારા મિત્રોને જણાવો અને તેની સૂચિ બનાવો. આ પરિણામોનો સારાંશ આ પ્રકરણમાં કોઈ એક જગ્યાએ આપેલ છે.



આકૃતિ 3.6

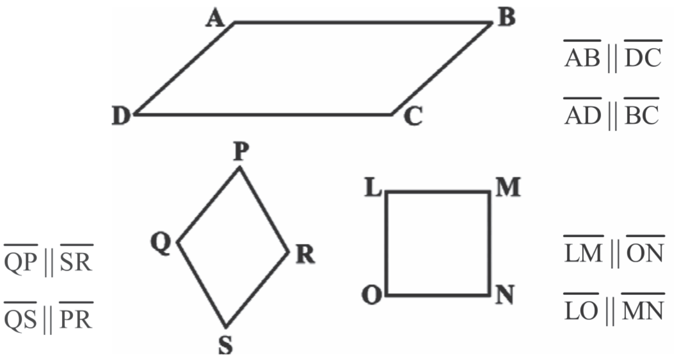
અહીં બતાવો કે ΔABC અને ΔADC એકરૂપ છે. તમે આમાંથી શું તારણ કાઢશો ?

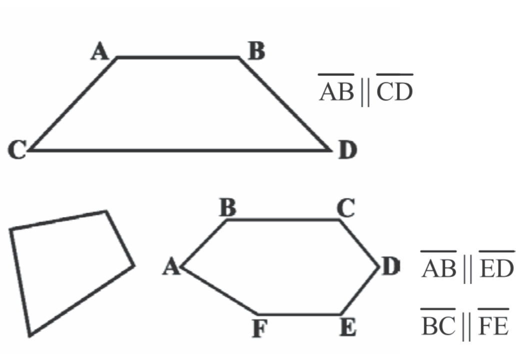


આકૃતિ 3.7

3.3.3 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ (Parallelogram)

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એક ચતુષ્કોણ છે. તેના નામ પ્રમાણે તેનો સંબંધ સમાંતર રેખાઓ સાથે છે.



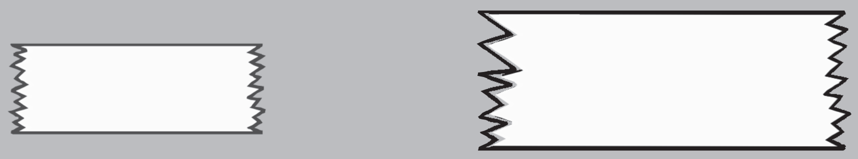


સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. **સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી.**

આ આકૃતિઓનો અભ્યાસ કરો અને પોતાના શબ્દોમાં બતાવવાનો પ્રયત્ન કરો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કોને કહેવાય ? તમારું નિરીક્ષણ તમારા મિત્રોને જણાવો.
લંબચોરસને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કહી શકાય કે નહીં તે ચકાસો.

આટલું કરો

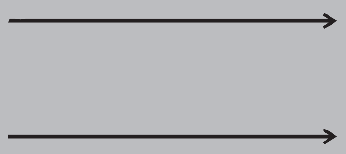
પૂંઠાની બે અલગ-અલગ પહોળાઈવાળી લંબચોરસ પટ્ટીઓ લો. (આકૃતિ 3.8)



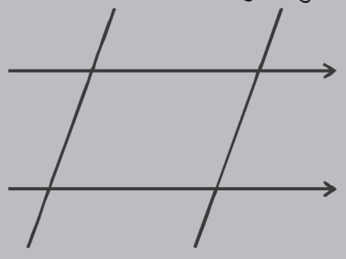
પટ્ટી-1 **પટ્ટી-2**

આકૃતિ 3.8

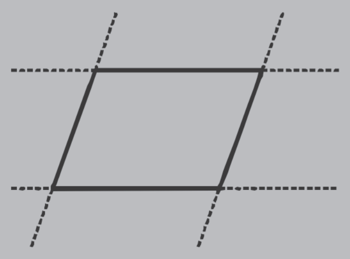
એક પૂંઠાની પટ્ટીને સમક્ષિતિજ રાખીને આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે તેની લંબાઈની દિશામાં બે રેખા દોરો (આકૃતિ 3.9).
હવે બીજી પટ્ટીને દોરેલી રેખાઓ ઉપર ત્રાંસી રાખીને આ જ પ્રમાણે બીજી બે રેખા દોરો (આકૃતિ 3.10).
આ ચાર રેખા વડે બનતી બંધ આકૃતિ ચતુષ્કોણ છે. આ પરસ્પર સમાંતર રેખાની બે જોડ દ્વારા બનેલ છે (આકૃતિ 3.11). જે એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 3.9



આકૃતિ 3.10



આકૃતિ 3.11

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એક એવો ચતુષ્કોણ છે જેમાં સામસામેની બાજુની દરેક જોડ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.

3.3.4 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં અંગો (Elements of a Parallelogram)

આકૃતિ 3.12

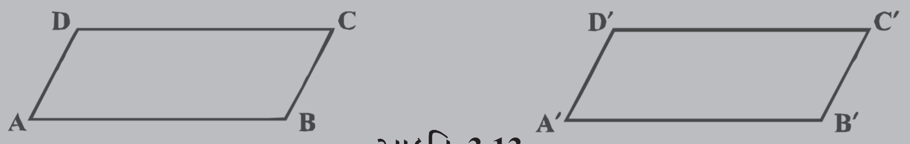
એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને ચાર બાજુ અને ચાર ખૂણા હોય છે. આમાંથી અમુક સમાન માપના હોય છે. આ અંગોને સંબંધિત કેટલાક શબ્દો તમારે યાદ રાખવા પડશે.

એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD આપેલ છે (આકૃતિ 3.12). $\overline{AB}$ અને $\overline{CD}$ તેની **સામસામેની બાજુ** છે. $\overline{AD}$ તથા $\overline{BC}$ સામસામેની બાજુની બીજી જોડ બનાવે છે. $\angle A$ તથા $\angle C$ **સામસામેના ખૂણાની** એક જોડ છે અને આ પ્રકારે $\angle B$ તથા $\angle D$ સામસામેના ખૂણાની બીજી એક જોડ છે.

$\overline{AB}$ અને $\overline{BC}$ **પાસપાસેની બાજુ** છે અર્થાત્ એક બાજુના અંત્યબિંદુથી બીજી બાજુની શરૂઆત થાય છે. શું $\overline{BC}$ અને $\overline{CD}$ પણ પાસપાસેની બાજુ છે? બીજી બે પાસપાસેની બાજુની જોડ શોધવાનો પ્રયત્ન કરો. $\angle A$ અને $\angle B$ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના **પાસપાસેના ખૂણા** છે. આ ખૂણાઓ કોઈ એક બાજુનાં અંત્યબિંદુઓ પર બનેલા હોય છે. $\angle B$ તથા $\angle C$ પણ પાસપાસેના ખૂણા છે. આવી બીજી પાસ પાસેના ખૂણાની જોડને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં ઓળખવાનો પ્રયત્ન કરો.

આટલું કરો

એકરૂપ હોય તેવા બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ટુકડાઓ ABCD તથા A′B′C′D′ લો (આકૃતિ 3.13).



આકૃતિ 3.13

અહીં $\overline{AB}$ અને $\overline{A'B'}$ સમાન છે, પરંતુ તેમના નામ અલગ છે. આવી જ રીતે બીજી સંગત બાજુની જોડ પણ સમાન માપની હશે.

હવે $\overline{A'B'}$ ને $\overline{DC}$ પર મૂકો. શું તે સુસંગત છે ? હવે તમે $\overline{AB}$ અને $\overline{DC}$ ની લંબાઈ વિશે શું કહેશો ?

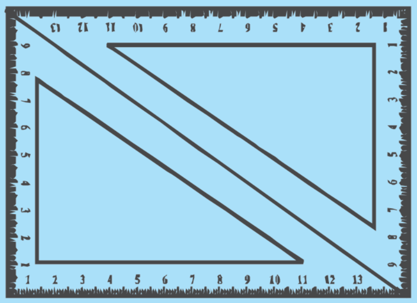
આ જ પ્રમાણે $\overline{AD}$ અને $\overline{BC}$ ની લંબાઈનું નિરીક્ષણ કરો. તમને શું જોવા મળ્યું ?

આ જ પરિણામ તમને $\overline{AB}$ અને $\overline{DC}$ ની લંબાઈ માપીને પણ મળી શકશે.

ગુણધર્મ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુની લંબાઈ સમાન હોય છે.

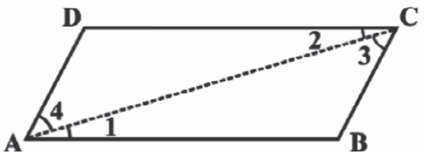
પ્રયત્ન કરો

30°–60°–90°ના ખૂણા ધરાવતા બે કાટખૂણિયા લો. હવે તેમને એ પ્રમાણે ગોઠવો કે જેથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બને (આકૃતિ 3.14). શું આ પ્રવૃત્તિ તમને ઉપરોક્ત ગુણધર્મને ચકાસવામાં મદદ કરશે ?


આકૃતિ 3.14

તમે આ ગુણધર્મને તાર્કિક દલીલોથી પણ પ્રભાવશાળી બનાવી શકો છો.

એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD લો (આકૃતિ 3.15). તેનો વિકર્ણ $\overline{AC}$ દોરો. આપણે જોઈએ છીએ કે $\angle 1 = \angle 2$ અને $\angle 3 = \angle 4$ (કેમ ?)



આકૃતિ 3.15

હવે ત્રિકોણ ABC અને ADCમાં, $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$ અને $\overline{AC}$ સામાન્ય બાજુ છે. તેથી એકરૂપતાની ખૂબાખૂ (ખૂણો - બાજુ - ખૂણો) (ASA – Angle - Side - Angle) શરત દ્વારા $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (અહીં ખૂબાખૂ શરતનો ઉપયોગ કેવી રીતે થયો ?)

એટલે, AB = DC અને BC = AD

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 3.16 માં દર્શાવેલ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ PQRSની પરિમિતિ શોધો.

ઉકેલ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુનું માપ સમાન હોય છે.

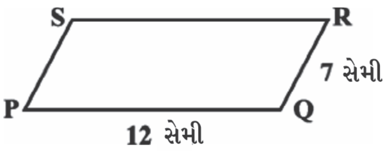
એટલે, PQ = SR = 12 સેમી

અને QR = PS = 7 સેમી

∴ પરિમિતિ = PQ + QR + RS + SP

= 12 સેમી + 7 સેમી + 12 સેમી + 7 સેમી

= 38 સેમી



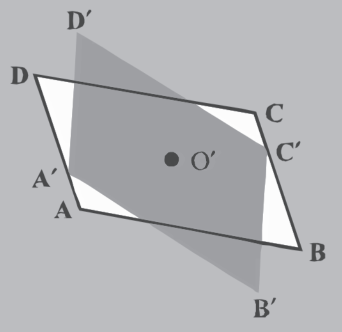
આકૃતિ 3.16

3.3.5 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ખૂણાઓ (Angles of a Parallelogram)

આપણે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુનાં માપ સંબંધિત ગુણધર્મનો અભ્યાસ કર્યો. હવે ખૂણાઓ વિશે શું કહી શકાય ?

આટલું કરો

ધારો કે એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD છે (આકૃતિ 3.17) 'ટ્રેસિંગ' કાગળ પર આની એક નકલ A′B′C′D′ દોરો. હવે A′B′C′D′ને ચતુષ્કોણ ABCD પર મૂકો. ચતુષ્કોણના વિકર્ણના છેદબિંદુ પર એક ટાંકણી લગાવો. હવે 'ટ્રેસિંગ' કાગળને 180°ના ખૂણો બનાવે તે રીતે ફેરવો. આ ચતુષ્કોણ હજુ પણ એકબીજાને સુસંગત હશે, પરંતુ હવે તમે જોશો કે બિંદુ A′, બિંદુ C પર તથા તે જ રીતે બિંદુ B′, બિંદુ D પર હશે.



આકૃતિ 3.17

ઉપરોક્ત પ્રવૃત્તિ દ્વારા તમને ખૂણા ∠A તથા ખૂણા ∠Cના માપ વિશે કાંઈ જાણકારી પ્રાપ્ત થઈ ? આ જ રીતે ∠B તથા ∠Dના માપની જાણકારી મેળવો અને તમારું તારણ જણાવો.

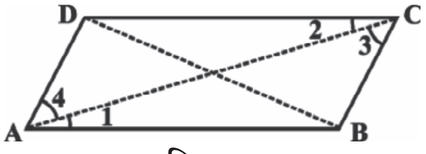
ગુણધર્મ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેના ખૂણાનાં માપ સમાન હોય છે.

પ્રયત્ન કરો

30°–60°–90°ના માપ ધરાવતાં બે કાટખૂણિયા લઈને અગાઉની જેમ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ બનાવો. શું આ રીતે બનેલ આકૃતિ ઉપરોક્ત ગુણધર્મની પુષ્ટિ કરે છે ?

ઉપરોક્ત ગુણધર્મને તમે તાર્કિક દલીલો દ્વારા પણ પુરવાર કરી શકો છો.

જો $\overline{AC}$ અને $\overline{BD}$ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ હોય (આકૃતિ 3.18) તો તમને $\angle 1 = \angle 2$, અને $\angle 3 = \angle 4$ મળે (કેમ ?)



આકૃતિ 3.18

ΔABC અને ΔADC (આકૃતિ 3.19)નો અલગ-અલગ અભ્યાસ કરતાં તમે જોઈ શકો છો કે એકરૂપતાની ખૂબાખૂ (ASA) શરત પ્રમાણે,

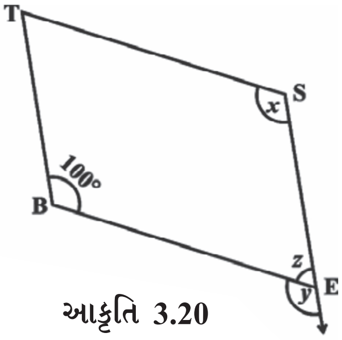
$\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (કેવી રીતે ?)

આકૃતિ 3.19

આ દર્શાવે છે કે $\angle$B અને $\angle$D નાં માપ સમાન છે.

આ જ પ્રમાણે તમે મેળવી શકો છો કે $m\angle A = m\angle C$.

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 3.20 માં, BEST એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. x, y, z નાં મૂલ્ય શોધો.



આકૃતિ 3.20

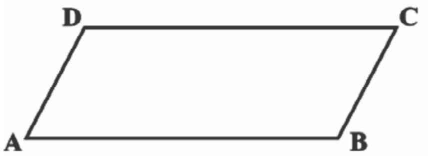
ઉકેલ : બિંદુ S, બિંદુ Bની સામે છે.

તેથી $x = 100^\circ$ (સામેના ખૂણાનો ગુણધર્મ)

$y = 100^\circ$ ($\angle x$ નો અનુકોણ)

$z = 80^\circ$ ($\angle y$ અને $\angle z$ રૈખિક જોડ બનાવે છે.)

હવે આપણે આપણું ધ્યાન સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના પાસપાસેના ખૂણાઓ ઉપર કેન્દ્રિત કરીએ. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD (આકૃતિ 3.21) માં, $\angle$A અને $\angle$D, $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ ની છેદિકા $\overline{DA}$ થી બનતા છેદિકાની એક તરફના અંતઃકોણ હોવાથી તે એકબીજાના પૂરકકોણ છે.



આકૃતિ 3.21

$\angle$A અને $\angle$B પણ એકબીજાના પૂરકકોણ છે. કેમ ?

$\angle$A અને $\angle$B, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ની છેદિકા $\overline{BA}$ થી બનતા છેદિકાની એકતરફના અંતઃકોણ છે.

આકૃતિ પરથી પૂરકકોણની આવી બીજી બે જોડ શોધો.

ગુણધર્મ : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં પાસપાસેના ખૂણા એકબીજાના પૂરક હોય છે.

ઉદાહરણ 5 : સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ RING(આકૃતિ 3.22)માં, જો $m\angle R = 70^\circ$ હોય તો બીજા ખૂણાનાં માપ શોધો.

આકૃતિ 3.22

ઉકેલ : અહીં $m\angle R = 70^\circ$ આપેલ છે.

આથી $m\angle N = 70^\circ$ થાય.

કારણ કે, $\angle$R અને $\angle$N સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા છે.

હવે $\angle$R અને $\angle$I એકબીજાના પૂરકકોણ હોવાથી $m\angle I = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

અને $m\angle G = 110^\circ$, $\angle$G અને $\angle$I સામસામેના ખૂણા હોવાથી

આથી, $m\angle R = m\angle N = 70^\circ$ અને $m\angle I = m\angle G = 110^\circ$

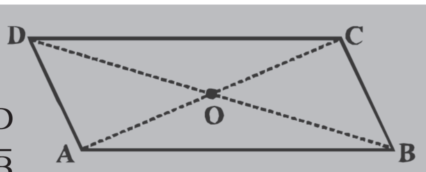
વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

$m\angle R = m\angle N = 70^\circ$ દર્શાવ્યા બાદ, બીજી કોઈ રીતે $m\angle I$ અને $m\angle G$ નું માપ શોધી શકાય ?

3.3.6 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ (Diagonals of a Parallelogram)

સામાન્ય રીતે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણના માપ સમાન હોતા નથી. (શું તમે આ તમારી અગાઉની પ્રવૃત્તિઓમાં ચકાસ્યું ?) છતાં પણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ એક વિશિષ્ટ ગુણધર્મ ધરાવે છે.

આટલું કરો



આકૃતિ 3.23

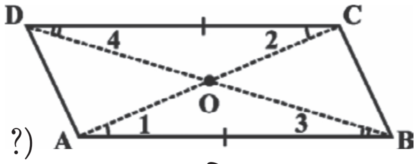
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક કાપેલો ટૂકડો તેને ABCD કહો (આકૃતિ 3.23). તેના વિકર્ણ $\overline{AC}$ અને $\overline{DB}$ એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે.

બિંદુ C, બિંદુ A પર આવે તે રીતે ગડી વાળીને $\overline{AC}$ નું મધ્યબિંદુ શોધો. શું આ મધ્યબિંદુ, બિંદુ O છે ?

શું આ બતાવે છે કે વિકર્ણ $\overline{DB}$, વિકર્ણ $\overline{AC}$ ને બિંદુ O માં દુભાગે છે ? તમારા મિત્રો સાથે આની ચર્ચા કરો અને $\overline{DB}$ નું મધ્યબિંદુ ક્યાં મળશે તે શોધવા આ પ્રવૃત્તિ ફરી કરો.

ગુણધર્મ : *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ એકબીજાને (તેમના છેદબિંદુમાં જ) દુભાગે છે.*

ઉપરોક્ત ગુણધર્મને તાર્કિક દલીલોથી પુરવાર કરવો મુશ્કેલ નથી. આકૃતિ 3.24 માં એકરૂપતાની ખૂબાખૂ (ASA) શરતનો ઉપયોગ કરવાથી આપણે જોઈ શકીએ કે



આકૃતિ 3.24

$\Delta AOB \cong \Delta COD$ (અહીં ખૂબાખૂ શરત કેવી રીતે ઉપયોગી થઈ ?)

તેથી $AO = CO$ અને $BO = DO$.

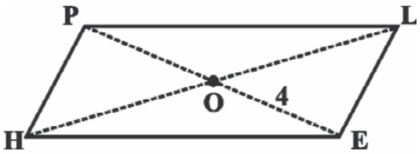
ઉદાહરણ 6 : આકૃતિ 3.25 માં, HELP એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે (લંબાઈ સેમીમાં આપેલ છે). અહીં $OE = 4$ અને HL, PE કરતાં 5 વધારે છે. તો OH શોધો.

ઉકેલ : જો, $OE = 4$ હોય તો $OP = 4$ (કેમ ?)

તેથી, $PE = 8$ (કેમ ?)

આથી, $HL = 8 + 5 = 13$

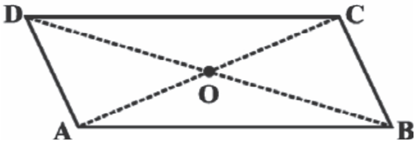
માટે, $OH = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$ (સેમી)



આકૃતિ 3.25

સ્વાધ્યાય 3.3

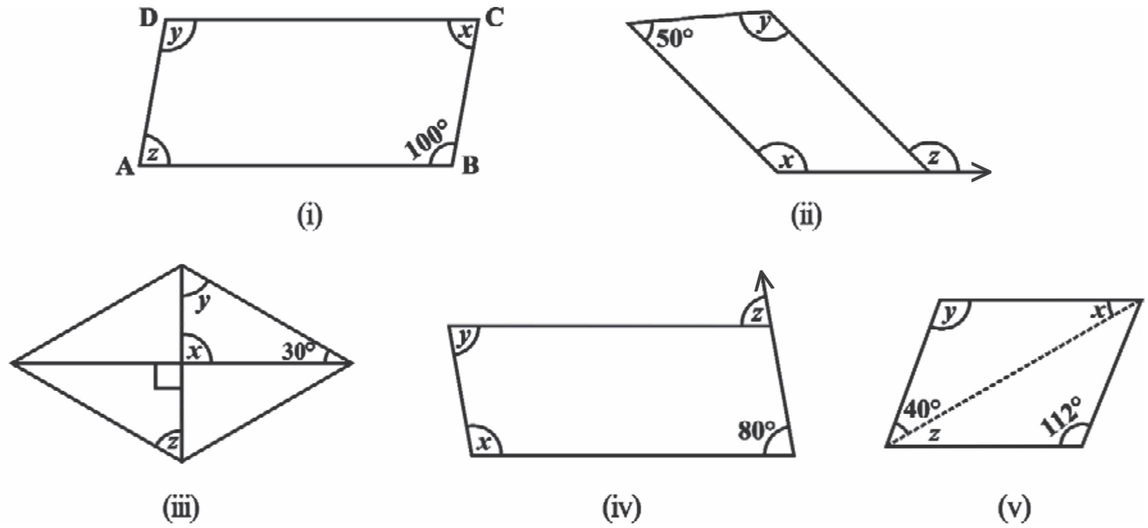
1. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD આપેલ છે. દરેક વિધાનને તેમાં ઉપયોગ કરવામાં આવેલ વ્યાખ્યા અથવા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીને પૂરું કરો.



(i) AD = ... (ii) $\angle DCB$ = ...

(iii) OC = ... (iv) $m\angle DAB + m\angle CDA$ = ...

2. નીચેના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં x, y અને z નાં મૂલ્ય શોધો.



3. શું ચતુષ્કોણ ABCD, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ થઈ શકે, જો ....

(i) $\angle D + \angle B = 180^o$?

(ii) AB = DC = 8 સેમી, AD = 4 સેમી અને BC = 4.4 સેમી ?

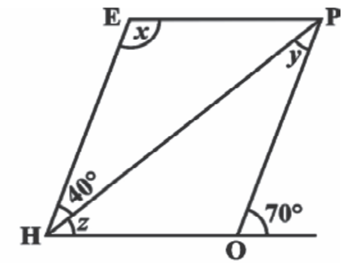
(iii) $\angle A = 70^o$ અને $\angle C = 65^o$?

4. એક એવા ચતુષ્કોણની કાચી (Rough) આકૃતિ દોરો કે જે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ના હોય પરંતુ તેમાં સામસામેના ખૂણાની એક જોડ સમાન હોય.

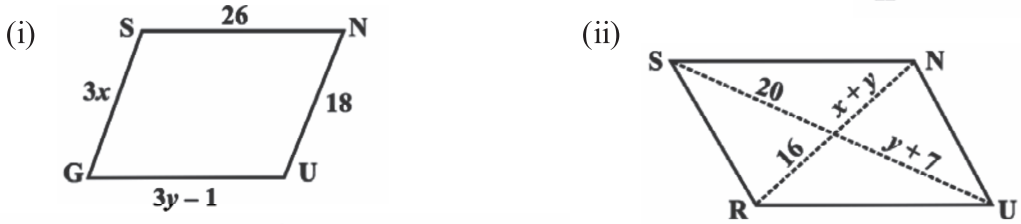
5. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં બે પાસપાસેના ખૂણાના માપનો ગુણોત્તર 3:2 છે, તો ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાના માપ શોધો.

6. એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના પાસપાસેના ખૂણાની એક જોડના ખૂણાના માપ સમાન છે. તો ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણાના માપ શોધો.

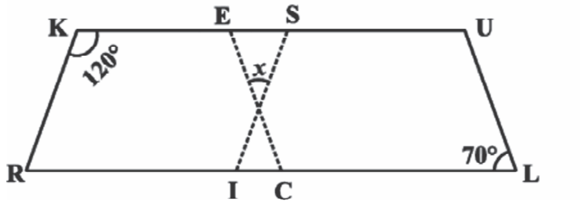
7. આકૃતિમાં એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ HOPE દર્શાવેલ છે. x, y, z ખૂણાના માપ શોધો. ખૂણો શોધવા કયા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કર્યો છે તે જણાવો.



8. નીચેની આકૃતિ GUNS અને RUNS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. x અને y શોધો. (લંબાઈ સેમીમાં છે.)

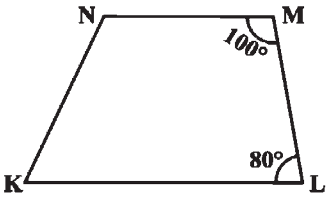


9.

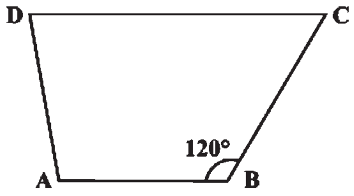


ઉપરની આકૃતિમાં RISK અને CLUE સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, તો x શોધો.

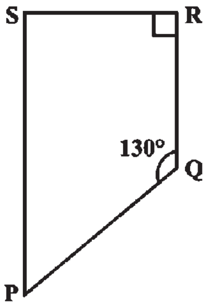
10. નીચેની આકૃતિ સમલંબ ચતુષ્કોણ કેવી રીતે છે, તે સમજાવો. કઈ બે બાજુ પરસ્પર સમાંતર છે ? (આકૃતિ 3.26)



આકૃતિ 3.26



આકૃતિ 3.27



આકૃતિ 3.28

11. આકૃતિ 3.27 માં, જો $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ હોય, તો $m\angle C$ શોધો.

12. આકૃતિ 3.28 માં, જો $\overline{SP} \parallel \overline{RQ}$ હોય, તો $\angle P$ અને $\angle S$નું માપ શોધો. (જો તમે $m\angle R$ શોધતા હોય, તો શું, $m\angle P$ શોધવાની અન્ય પદ્ધતિઓ હશે ?)

4YP7HF

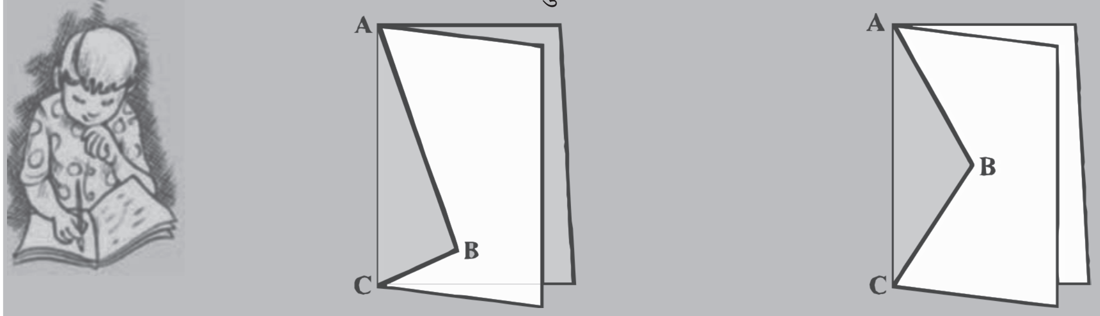
3.4 વિશિષ્ટ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ

3.4.1 સમબાજુ ચતુષ્કોણ (Rhombus)

પતંગાકાર ચતુષ્કોણ (જે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી) એક વિશેષ સ્થિતિમાં આપણને સમબાજુ ચતુષ્કોણ (તમે જોશો, કે તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હશે) મળે છે.

આટલું કરો

તમે પોતે બનાવેલ પતંગાકાર ચતુષ્કોણને યાદ કરો.



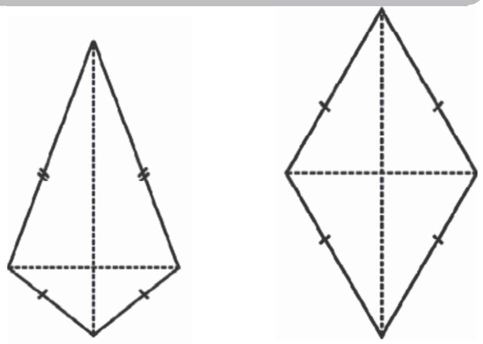
પતંગ-કાપ   સમબાજુ ચતુષ્કોણ-કાપ

જ્યારે તમે ABCની દિશામાં કાગળને કાપીને ખોલો છો ત્યારે તમને પતંગાકાર ચતુષ્કોણ મળે છે. અહીં AB અને BCની લંબાઈ અલગ-અલગ છે. હવે જો તમે AB = BC દોરો, તો મળેલ પતંગાકાર ચતુષ્કોણને, સમબાજુ ચતુષ્કોણ કહેવાય.

ધ્યાન રાખો, સમબાજુ ચતુષ્કોણમાં બધી જ બાજુની લંબાઈ સમાન હોય છે, પરંતુ પતંગાકાર ચતુષ્કોણમાં આ આવશ્યક નથી.

સમબાજુ ચતુષ્કોણ એક એવો ચતુષ્કોણ છે કે જેમાં બધી જ બાજુની લંબાઈ સમાન હોય છે.

હવે, સમબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુની લંબાઈ સમાન હોવાથી તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પણ થાય. **તેથી સમબાજુ ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ અને પતંગ બંનેના બધા જ ગુણધર્મ ધરાવે છે.** તેમની યાદી બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો. ત્યાર બાદ, તમે બનાવેલ યાદીને આ પુસ્તકમાં આપેલ યાદી સાથે સરખાવો.



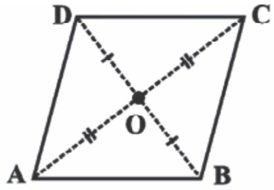
પતંગાકાર ચતુષ્કોણ   સમબાજુ ચતુષ્કોણ

સમબાજુ ચતુષ્કોણનો સૌથી અગત્યનો ગુણધર્મ તેના વિકર્ણ વિશે છે.

ગુણધર્મ : *સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણ એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે છે.*

આટલું કરો

સમબાજુ ચતુષ્કોણની કાગળની એક પ્રતિકૃતિ લો. હવે આ કાગળની ગડી વાળી અને ચકાસો કે બે વિકર્ણનું છેદબિંદુ એ જ તેમનું મધ્યબિંદુ છે કાટખૂણિયાનો ઉપયોગ કરીને ચકાસો કે બે વિકર્ણ એકબીજાને કાટખૂણે છેદે છે.



આકૃતિ 3.29

અહીં આ ગુણધર્મને તાર્કિક દલીલોથી પુરવાર કરતું એક રેખાચિત્ર આપેલ છે. ABCD એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ (આકૃતિ 3.29) છે. તેથી, તે એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પણ છે. તેના વિકર્ણ એકબીજાને દુભાગે છે. માટે, OA = OC અને OB = OD થાય. અહીં, $m\angle AOD = m\angle COD = 90^\circ$ સાબિત કરવાનું છે.

એકરૂપતાની બાબાબા (બાજુ - બાજુ - બાજુ) (SSS – Side - Side - Side) શરતને આધારે

$$\Delta AOD \cong \Delta COD$$

અહીં AO = CO (કેમ ?)
AD = CD (કેમ ?)
OD = OD

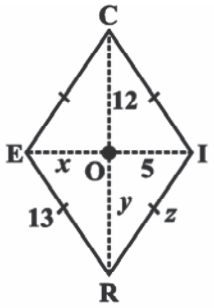
માટે $m\angle AOD = m\angle COD$

હવે $\angle AOD$ અને $\angle COD$, રૈખિક જોડના ખૂણા હોવાથી,

$m\angle AOD = m\angle COD = 90^\circ$

ઉદાહરણ 7 :

RICE સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે (આકૃતિ 3.30). x, y, z શોધો અને તેની સત્યાર્થતા પુરવાર કરો.



આકૃતિ 3.30

ઉકેલ :

x = OE	y = OR	z = સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુ છે
= OI (વિકર્ણ દુભાગે છે)	= OC (વિકર્ણ દુભાગે છે)	= 13 (બધી બાજુઓ સમાન હોય)
= 5	= 12	

3.4.2 લંબચોરસ (Rectangle)

લંબચોરસ એક સમાન માપના ખૂણા ધરાવતો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે (આકૃતિ 3.31).

આકૃતિ 3.31

ઉપરની વ્યાખ્યાનો અર્થ શું થાય ? તમારા મિત્રો જોડે ચર્ચા કરો.

હવે જો, લંબચોરસના બધા જ ખૂણાના માપ સમાન હોય તો દરેક ખૂણાનું માપ કેટલું હશે ?

ધારો કે દરેક ખૂણાનું માપ x° છે.

તેથી, $4x^\circ = 360^\circ$ (કેમ ?)

$\therefore x^\circ = 90^\circ$

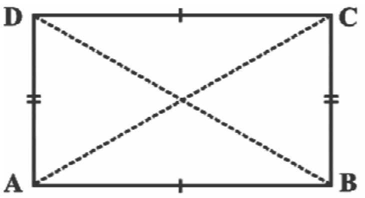
તેથી, લંબચોરસનો દરેક ખૂણો કાટખૂણો હોય છે.

આમ લંબચોરસ, એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. જેના બધા જ ખૂણા કાટખૂણા હોય છે.

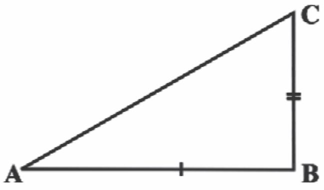
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોવાને લીધે લંબચોરસની સામસામેની બાજુઓ સમાન લંબાઈની હોય છે તથા તેના વિકર્ણ એકબીજાને દુભાગે છે.

લંબચોરસમાં વિકર્ણની લંબાઈ અસમાન હોઈ શકે ? (ચકાસો); તમને આશ્ચર્ય થશે કે લંબચોરસ(વિશેષ હોવાથી)ના વિકર્ણ સમાન લંબાઈના હોય છે.

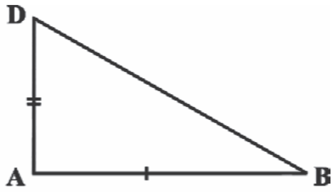
ગુણધર્મ : લંબચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ સમાન હોય છે.



આકૃતિ 3.32



આકૃતિ 3.33



આકૃતિ 3.34

આ પુરવાર કરવું એકદમ સરળ છે. જો ABCD લંબચોરસ હોય (આકૃતિ 3.32) અને તેમાં બનતા ત્રિકોણ ABC અને ત્રિકોણ ABD (અનુક્રમે આકૃતિ 3.33 અને 3.34)નું અલગ-અલગ નિરીક્ષણ કરતાં આપણને

$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ મળે

કારણ કે, $AB = AB$ (સામાન્ય બાજુ)

$BC = AD$ (કેમ ?)

$m\angle A = m\angle B = 90^\circ$ (કેમ ?)

આ એકરૂપતા બાખૂબા (બાજુ - ખૂણો - બાજુ) (SAS – Side - Angle - Side) શરતને અનુસરે છે.

તેથી $AC = BD$

અને લંબચોરસમાં વિકર્ણ સમાન લંબાઈના હોવા ઉપરાંત એકબીજાને દુભાગે પણ છે. (કેમ ?)

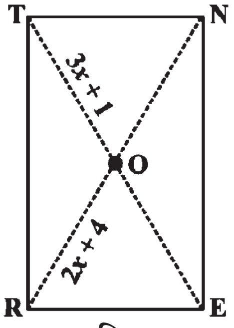
ઉદાહરણ 8 : RENT, લંબચોરસ છે. તેના વિકર્ણ પરસ્પર બિંદુ O માં છેદે છે. જો $OR = 2x + 4$ અને $OT = 3x + 1$ હોય, તો x શોધો.

ઉકેલ : $\overline{OT}$ ની લંબાઈ, વિકર્ણ $\overline{TE}$ ની લંબાઈથી અર્ધી છે અને $\overline{OR}$ ની લંબાઈ, વિકર્ણ $\overline{RN}$ કરતાં અર્ધી છે. બંને વિકર્ણની લંબાઈ સમાન છે. (કેમ ?)

તેથી, તેમના અર્ધા ભાગ પણ સમાન લંબાઈના થાય.

માટે, $3x + 1 = 2x + 4$

$\therefore \quad x = 3$



આકૃતિ 3.35

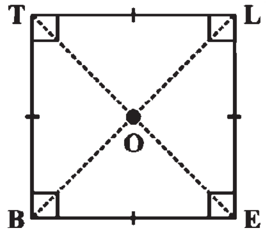
3.4.3 ચોરસ (Square)

ચોરસ, એક સમાન લંબાઈવાળી બાજુ ધરાવતો લંબચોરસ છે.

આમ ચોરસ, લંબચોરસના બધા જ ગુણધર્મો ધરાવે છે તેમજ બધી જ બાજુની લંબાઈ સમાન હોવાનો એક વધારાનો ગુણધર્મ પણ ધરાવે છે.

લંબચોરસની જેમ જ ચોરસના વિકર્ણ પણ સમાન લંબાઈના હોય છે.

લંબચોરસના વિકર્ણ પરસ્પર કાટખૂણે હોય તે જરૂરી નથી. (ચકાસો)



BELT એક ચોરસ છે.

$BE = EL = LT = TB$

$\angle B, \angle E, \angle L, \angle T$ કાટખૂણા છે.

$BL = ET$ અને $\overline{BL} \perp \overline{ET}$ છે.

$OB = OL$ અને $OE = OT$.

કોઈ પણ ચોરસમાં વિકર્ણ

(i) પરસ્પર દુભાગે. (ચોરસ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોવાથી)

(ii) સમાન લંબાઈના હોય. (ચોરસ એક લંબચોરસ હોવાથી)

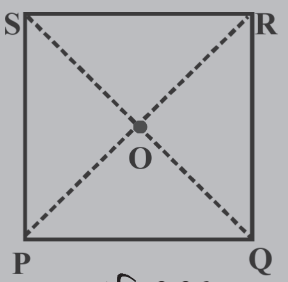
(iii) પરસ્પર લંબ હોય.

તેથી આપણને નીચે પ્રમાણેનો ગુણધર્મ મળે.

ગુણધર્મ : *ચોરસના વિકર્ણ એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે છે.*

આટલું કરો

એક ચોરસ ટુકડો PQRS લો (આકૃતિ 3.36). તેના વિકર્ણ પરથી તેની ગડી વાળો. શું બંને વિકર્ણનું મધ્યબિંદુ એક જ છે ? કાટખૂણિયાની મદદથી ખૂણા O નું માપ 90° છે કે નહીં તે ચકાસો. આ ઉપરોક્ત ગુણધર્મને સાબિત કરે છે.



આકૃતિ 3.36

આ ગુણધર્મને આપણે તાર્કિક દલીલો દ્વારા પણ સાબિત કરી શકીએ : ચોરસ ABCD ના વિકર્ણ પરસ્પર બિંદુ Oમાં છેદે છે (આકૃતિ 3.37).

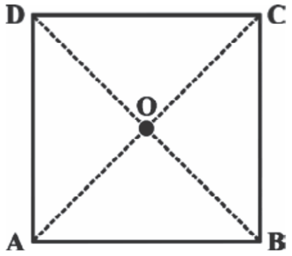
OA = OC (ચોરસ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોવાથી)

એકરૂપતાની બાબાબા શરત પ્રમાણે આપણને,

$\Delta AOD \cong \Delta COD$ (કેમ ?)

માટે $m\angle AOD = m\angle COD$

આ ખૂણાઓ રૈખિક જોડના હોવાથી દરેક ખૂણો કાટખૂણો છે.



આકૃતિ 3.37

સ્વાધ્યાય 3.4

1. નીચેનાં વિધાનો સાચાં છે કે ખોટાં તે જણાવો.

(a) દરેક લંબચોરસ ચોરસ છે.

(b) દરેક સમબાજુ ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(c) દરેક ચોરસ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે તેમજ લંબચોરસ પણ છે.

(d) દરેક ચોરસ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ નથી.

(e) દરેક પતંગાકાર ચતુષ્કોણ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(f) દરેક સમબાજુ ચતુષ્કોણ પતંગાકાર ચતુષ્કોણ છે.

(g) દરેક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.

(h) દરેક ચોરસ સમલંબ ચતુષ્કોણ છે.

2. એવા ચતુષ્કોણનાં નામ આપો કે જેમાં :

(a) ચારેય બાજુની લંબાઈ સમાન હોય. (b) ચાર કાટખૂણા હોય.

3. કેવી રીતે એક ચોરસ એ

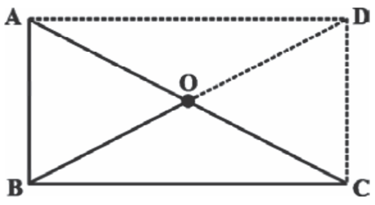
(i) ચતુષ્કોણ (ii) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ (iii) સમબાજુ ચતુષ્કોણ (iv) લંબચોરસ છે તે વિગતવાર સમજાવો.

4. નીચે દર્શાવ્યા મુજબ વિકર્ણ ધરાવતાં ચતુષ્કોણનાં નામ આપો.

(i) પરસ્પર દુભાગે (ii) પરસ્પરના લંબદ્વિભાજક હોય (iii) સમાન હોય

5. લંબચોરસ એક બહિર્મુખ ચતુષ્કોણ છે, સમજાવો.

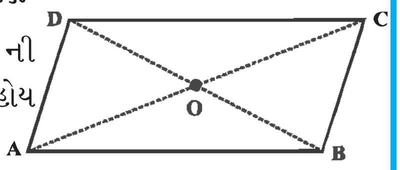
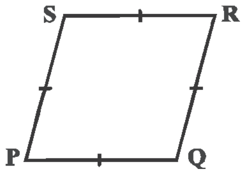
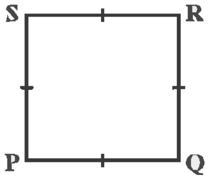
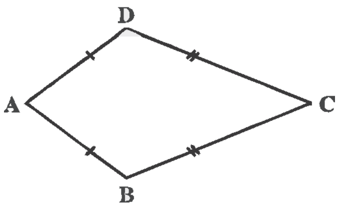
6. કાટકોણ ત્રિકોણ ABCમાં કાટખૂણાની સામેની બાજુનું મધ્યબિંદુ O છે. શિરોબિંદુઓ A, B અને Cથી બિંદુ O કેવી રીતે સમાન અંતરે આવે છે તે સમજાવો. (અહીં તૂટક રેખાઓ તમારી સહાયતા માટે દોરેલ છે.)



વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. કડિયો કોંક્રિટનો એક 'સ્લેબ' બનાવે છે. તે તેને લંબચોરસ બનાવવા માંગે છે. કેટલા અલગ-અલગ પ્રકારથી, તે આ 'સ્લેબ' લંબચોરસ જ છે તેવી ચકાસણી કરી શકશે ?
2. સમાન લંબાઈની બાજુઓ ધરાવતા લંબચોરસ તરીકે ચોરસને વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવ્યો હતો. આપણે તેને સમાન ખૂણા ધરાવતાં સમબાજુ ચતુષ્કોણ તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ ? સ્પષ્ટતા કરો.
3. સમલંબ ચતુષ્કોણના બધા જ ખૂણા સમાન હોઈ શકે ? તેની દરેક બાજુઓ સમાન હોઈ શકે ? સ્પષ્ટતા કરો.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

ચતુષ્કોણ	ગુણધર્મ
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ : સામસામેની બાજુની પ્રત્યેક જોડ સમાંતર હોય તેવો ચતુષ્કોણ. 	(1) સામસામેની બાજુની લંબાઈ સમાન હોય. (2) સામસામેનાં ખૂણાનાં માપ સમાન હોય. (3) વિકર્ણ પરસ્પર દુભાગે.
સમબાજુ ચતુષ્કોણ : સમાન લંબાઈની બાજુ ધરાવતો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ. 	(1) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બધા જ ગુણધર્મો. (2) વિકર્ણ પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે.
લંબચોરસ : કાટકોણ ધરાવતો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ	(1) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બધા જ ગુણધર્મો. (2) દરેક ખૂણો કાટખૂણો હોય. (3) વિકર્ણની લંબાઈ સમાન હોય.
ચોરસ : સમાન લંબાઈની બાજુ ધરાવતો લંબચોરસ. 	સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ અને લંબચોરસના બધા જ ગુણધર્મો.
પતંગાકાર ચતુષ્કોણ : પાસપાસેની બાજુઓની ફક્ત બે જોડ સમાન લંબાઈની હોય તેવો ચતુષ્કોણ. 	(1) વિકર્ણ પરસ્પર કાટખૂણે હોય. (2) કોઈ એક વિકર્ણ, બીજા વિકર્ણને દુભાગે. (3) આપેલ આકૃતિમાં $m\angle B = m\angle D$ પણ $m\angle A \neq m\angle C$